## Lösungen zu den Übungsaufgaben aus Kapitel 5

**Ü5.1:** Die entsprechende Bellman'sche Funktionalgleichung kann angegeben werden als:

$$V(c,t) = \max_{q_t \in \mathbb{D}_{r_t}} \{ r_t(\min\{q_t, c\}) \cdot \min\{q_t, c\} + V(c - \min\{q_t, c\}, t-1) \}$$

für alle $0 \le c \le C$ und $t = 1, \ldots, T$

Die zu beachtenden Randbedingungen lauten:

$V(c, 0) = 0$ für alle $c \ge 0$

$V(0, t) = 0$ für $t = 1, \ldots, T$

Die Formulierung stellt den deterministischen Spezialfall des allgemeinen stochastischen Modells aus Kapitel 5.2.3.4 dar, wobei zur bessereren Vergleichbarkeit mit Modellformulierung M5.2 nicht die Angebotspreise, sondern die Nachfragemengen $q_t$ $(t = 1, \ldots, T)$ als Entscheidungsvariablen gewählt wurden.

**Ü5.2:** a) Der Lösungsgang erfolgt vollständig analog zu Beispiel 5.3. Die Optimalitätsbedingungen (5.13) bleiben dabei unverändert. Die Bedingung vom komplementären Schlupf (5.14) ergibt sich aufgrund der vergrößerten Angebotskapazität zu

$$\pi \cdot (700 - q_1^* - q_2^* - q_3^*) = 0 .$$

Als erstes überprüfen wir, ob die Lösung des Problems der Lösung der unbeschränkten Formulierung entspricht, indem wir $\pi = 0$ setzen und die Bedingungen (5.13) auflösen. Es ergeben sich die Werte $q_1 = 200$ ME, $q_2 = 225$ ME sowie $q_3 = 250$ ME. Diese Lösung ist wegen $q_1 + q_2 + q_3 = 675 < 700$ auch für das beschränkte Problem zulässig und daher optimal. Die zugehörigen optimalen Preise für die einzelnen Teilperioden lauten $r_1^* = r_1(q_1) = 100$, $r_2^* = 75$ und $r_3^* = 50$ GE/ME. Der Gesamterlös beträgt 49 375 GE.

b) Die Bedingung vom komplementären Schlupf (5.14) ergibt sich aufgrund der veränderten Angebotskapazität zu

$$\pi \cdot (100 - q_1^* - q_2^* - q_3^*) = 0 .$$

Offensichtlich kann die Lösung des unbeschränkten Problems hier nicht optimal sein, da die Angebotskapazität im Vergleich zum Beispiel weiter verringert wurde. Daher setzen wir nun $\pi > 0$, so dass Bedingung (5.14) in $q_1^* + q_2^* + q_3^* = 100$ übergeht. Zusammen mit den Bedingungen (5.13) ergibt sich ein lineares Gleichungssystem mit 4 Gleichungen und 4 Unbekannten, dessen Lösung zu den Werten $q_1 = 85$, $q_2 = 52.5$ und $q_3 = -37.5$ ME sowie $\pi = 115$ führt. Wegen $q_3 < 0$ ist die ermittelte Lösung allerdings nicht zulässig (vgl. auch Bemerkung 5.2, S. 199, im Lehrbuch). Aus dem Ergebnis lässt sich jedoch unmittelbar schlussfolgern, dass in einer optimalen Lösung $q_3^* = 0$ gelten muss. Man kann daher das Problem unter Ausschluss der Entscheidungsvariable $q_3$ nun erneut lösen, so dass die folgenden Optimalitätsbedingungen verbleiben:

$$200 - q_1^* = \pi, \; 150 - \frac{2}{3}q_2^* = \pi \text{ und } q_1^* + q_2^* = 100$$

Das sich ergebende Gleichungssystem führt zu den zulässigen und damit optimalen Werten $q_1^* = 70$ und $q_2^* = 30$ ME sowie $\pi = 130$. Die optimalen Preise für die einzelnen Teilperioden lauten $r_1^* = r_1(q_1^*) = 165$, $r_2^* = 140$ und $r_3^* = 100$ GE/ME. Der zugehörige Gesamterlös beträgt 15 750 GE.

**Ü5.3:** Das Verfahren aus Kap. 5.2.2.4 stellt auch unter der Zusatzforderung der Ganzzahligkeit der Lösung lediglich eine Heuristik dar. Dies resultiert daraus, dass im Rahmen des Algorithmus die Entscheidung über die weitere Erhöhung der Nachfragemenge auf Grundlage der nur marginal geltenden Grenzerlöse getroffen wird. So kann beispielsweise die (konkave) Umsatzfunktion der Periode mit aktuell höchstem Grenzerlös stärker gekrümmt sein als die der vermeintlich schlechteren anderen Perioden, so dass die Erhöhung um eine ganze Einheit letztlich zu einer vergleichweise geringeren Umsatzerhöhung führt. Darüber hinaus kann das Maximum der periodenbezogenen Umsatzfunktion durch Anwendung der Heuristik zu weit überschritten werden. Betrachten wir dazu ein Beispiel mit nur einer einzigen Periode, der inversen Nachfragefunktion $r(q) = 6.5 - q$ und der Kapazitätsrestriktion $C = 10$. Die Grenzerlösfunktion lautet dann $u'(q) = 6.5 - 2q$. Im Rahmen des Algorithmus wird die Nachfragemenge daher zunächst bis auf 3 ME erhöht. Da der Grenzerlös mit $u'(3) = 0.5$ immer noch größer als 0 ausfällt, wird die Nachfragemenge weiter bis auf 4 ME erhöht. Wegen $u'(4) = -1.5 < 0$ bricht das Verfahren anschließend ab. Der mit der ermittelten Lösung erzielte Gesamterlös beträgt $u(4) = 10$ GE. Dagegen kann bei einer Nachfragemenge von nur 3 ME ein Erlös in Höhe von $u(3) = 10.5$ GE erzielt werden. Die letzte Erhöhung der Nachfragemenge im Rahmen der Heuristik hat somit – trotz positivem Grenzerlös – zu einer Verschlechterung des Gesamterlöses geführt und hätte daher unterbleiben sollen.

**Ü5.4:** Sei $\varepsilon_t$ eine Zufallsvariable mit $E(\varepsilon_t) = 0$ und $\eta_t$ eine nichtnegative Zufallsvariable mit $E(\eta_t) = 1$. Dann kann das kombinierte Nachfragemodell wie folgt formuliert werden:

$$Q_t(r_t, \varepsilon_t, \eta_t) = \eta_t \cdot q_t(r_t) + \varepsilon_t \qquad \text{mit } r_t \in \mathbb{D}_{Q_t},\ t = 1, \ldots, T$$

Wegen $E(Q_t(r_t, \varepsilon_t, \eta_t)) = E(\eta_t) \cdot q_t(r_t) + E(\varepsilon_t) = q_t(r_t)$ lässt sich die Gültigkeit der getroffenen Annahmen – vorausgesetzt, $q_t(r_t)$ sowie $\varepsilon_t$ werden entsprechend definiert – auch hier grundsätzlich sicherstellen.

**Ü5.5:** Wir drücken die Bellman'sche Funktionalgleichung zunächst in Abhängigkeit von der Verkaufswahrscheinlichkeit $p_t$ aus:

$$V(c, t) = \max_{p_t \in \mathbb{D}_{r_t}} \{p_t \cdot (r_t(p_t) + V(c-1, t-1)) + (1-p_t) \cdot V(c, t-1)\}$$

für alle $0 \le c \le C$ und $t = 1, \ldots, T$.

Die zu beachtenden Randbedingungen lauten:

$$V(c, 0) = 0 \qquad \text{für alle } c \ge 0$$

$$V(0, t) = 0 \qquad \text{für } t = 1, \ldots, T$$

Wir gehen davon aus, dass wie in Beispiel 5.6 ein globales Maximum an einem inneren Punkt des Definitionsbereichs $\mathbb{D}_{r_t}$ vorliegt, so dass zur Optimierung lediglich die notwendigen Optimalitätsbedingungen – d.h. die gleich Null gesetzten ersten Ableitungen – zu lösen sind. Es ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial p_t}(p_t \cdot (r_t(p_t) + V(c-1, t-1)) + (1-p_t) \cdot V(c, t-1)) = 0 \iff$$

$$\frac{\partial}{\partial p_t}(p_t \cdot r_t(p_t)) + V(c-1, t-1) - V(c, t-1) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$u_t'(p_t) = V(c, t-1) - V(c-1, t-1)$$

Da der Term $V(c, t-1) - V(c-1, t-1)$ die inputorientierten Opportunitätskosten beschreibt (vgl. Beispiel 5.6), liefert die letzte Gleichung das gewünschte Resultat.

**Ü5.6:** Lässt man die Kapazitätsbeschränkung fallen, so bestehen zwischen den einzelnen Perioden keinerlei Abhängigkeiten mehr. Das zu lösende Optimierungsproblem vereinfacht sich daher zu:

$$\text{Max } \sum_{t=1}^{T} r_t \cdot p_t(r_t) = \sum_{t=1}^{T} \text{Max } (r_t \cdot p_t(r_t))$$

Aufgrund der Zeithomogenität der Zahlungsbereitschaften im betrachteten Beispiel ergibt sich über alle Perioden hinweg ein erlösoptimaler Einheitspreis, der sich wie folgt berechnet:

$$\text{Max } \sum_{t=1}^{50} r_t \cdot \left(1 - \frac{1}{200} r_t\right) = \sum_{t=1}^{50} \text{Max } \left(r_t \cdot \left(1 - \frac{1}{200} r_t\right)\right)$$

Zur Ermittlung von $\text{Max } (r_t \cdot (1 - (1/200) r_t))$ setzt man die zugehörigen Bedingungen erster Ordnung gleich Null und erhält $r_t^* = 100$ $(t = 1, \ldots, 50)$ als erlösoptimalen Einheitspreis, der gleichzeitig den Mindestpreis für das kapazitierte Modell darstellt (vgl. Bemerkung 5.7).

Das Ergebnis lässt sich auch unmittelbar an der Formel für den optimalen Preis des kapazitierten Problems ablesen, da im Fall, dass die Angebotskapazität nicht beschränkt ist, die inputorientierten Opportunitätskosten gleich Null sind ($V(c, t-1) - V(c-1, t-1) = 0$) und daher gilt:

$$r_{t,c}^* = 100 + \frac{1}{2}(V(c, t-1) - V(c-1, t-1)) = 100$$

**Ü5.7:** Die asymptotische Äquivalenz der beiden Fixpreis-Modelle FP und OFP für $C \to \infty$ wird bereits im Lehrbuch hergeleitet (vgl. Formel (5.30), S. 209). Insbesondere sind beim Bernoulli-Nachfragemodell für $C \geq T$ beide Formulierungen vollkommen identisch. Das zeithomogene Bernoulli-Modell des Dynamic Pricing geht für $C \to \infty$ über in „Max $\sum_{t=1}^{T} r_t \cdot p_t(r_t)$ “ (vgl. Übungsaufgabe 5.9) und liefert aufgrund der Zeithomogenität über alle Perioden hinweg einen Einheitspreis. Es entspricht somit genau den Fixpreis-Modellen, die daher für $C \geq T$ optimal sind.

**Ü5.8:** Im Zusammenhang mit dem Beispiel unerwartet geringer Zahlungsbereitschaften aus dem Lehrbuch, Abb. 5.8, kann der Fall auftreten, dass trotz massiver Preissenkungen die Nachfrage nicht weiter „angekurbelt“ werden kann. Dies führt dazu, dass genauso viel verkauft wird wie bei Verwendung des Fixpreis-Modells, allerdings zu einem geringeren Durchschnittserlös, so dass eine Verringerung des Gesamterlöses resultiert.

**Ü5.9:** Die untere Gerade des Preiskorridors ergibt sich durch die Lösung des unkapazitierten Dynamic Pricing Problems:

$$\text{Max} \sum_{t=1}^{T} r_t \cdot p_t(r_t) = \sum_{t=1}^{T} \text{Max}\ (r_t \cdot p_t(r_t))$$

Zur Ermittlung des optimalen Angebotspreises in Periode t sind daher für die entsprechende Erlösfunktion $r_t \cdot p_t(r_t)$ die Bedingungen erster Ordnung zu lösen. Man erhält:

$$\left(r_t \cdot \left(1 - \frac{1}{r_{max}(t)} \cdot r_t\right)\right)' = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$1 - \frac{2r_t}{r_{max}(t)} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$r_t = \frac{1}{2} \cdot r_{max}(t)$$

Die letzte Gleichung liefert die Preisuntergrenze (PUG) in Abhängigkeit von der jeweiligen maximalen Zahlungsbereitschaft und beschreibt daher die untere Gerade des „Trichters“.