Lösungen zu den Übungsaufgaben aus Kapitel 3

Ü3.1: a) Die Start-Buchungslimits betragen $b_1 = 25$, $b_2 = 20$ und $b_3 = 10$. In der folgenden Tabelle sind jeweils die Annahmen (■) und Ablehnungen (□) der Anfragen für die zu untersuchenden Verfahren dargestellt:

Anfrage		Standard Nesting				Theft Nesting				Dynamische Anpassung						
		■?	b_1	b_2	b_3	■?	b_1	b_2	b_3	■?	b_1	b_2	b_3	x_1	x_2	x_3
1	P_1	■	24	20	10	■	24	19	9	■	24	20	10	4	10	10
2	P_2	■	23	19	10	■	23	18	8	■	23	19	10	4	9	10
3	P_3	■	22	18	9	■	22	17	7	■	22	18	9	4	9	9
4	P_1	■	21	18	9	■	21	16	6	■	21	18	9	3	9	9
5	P_1	■	20	18	9	■	20	15	5	■	20	18	9	2	9	9
6	P_3	■	19	17	8	■	19	14	4	■	19	17	8	2	9	8
7	P_3	■	18	16	7	■	18	13	3	■	18	16	7	2	9	7
8	P_1	■	17	16	7	■	17	12	2	■	17	16	7	1	9	7
9	P_2	■	16	15	7	■	16	11	1	■	16	15	7	1	8	7
10	P_1	■	15	15	7	■	15	10	0	■	15	15	7	0	8	7
11	P_1	■	14	14	7	■	14	9	0	■	14	14	6	0	8	7
12	P_2	■	13	13	7	■	13	8	0	■	13	13	6	0	7	7
13	P_1	■	12	12	7	■	12	7	0	■	12	12	5	0	7	7
14	P_3	■	11	11	6	□	12	7	0	■	11	11	4	0	7	6
15	P_3	■	10	10	5	□	12	7	0	■	10	10	3	0	7	5
16	P_3	■	9	9	4	□	12	7	0	■	9	9	2	0	7	4

Anfrage		Standard Nesting				Theft Nesting				Dynamische Anpassung						
		■?	b_1	b_2	b_3	■?	b_1	b_2	b_3	■?	b_1	b_2	b_3	x_1	x_2	x_3
17	P_3	■	8	8	3	□	12	7	0	■	8	8	1	0	7	3
18	P_3	■	7	7	2	□	12	7	0	■	7	7	0	0	7	2
19	P_3	■	6	6	1	□	12	7	0	□	7	7	0	0	7	2
20	P_2	■	5	5	1	■	11	6	0	■	6	6	0	0	6	2
21	P_2	■	4	4	1	■	10	5	0	■	5	5	0	0	5	2
22	P_2	■	3	3	1	■	9	4	0	■	4	4	0	0	4	2
23	P_2	■	2	2	1	■	8	3	0	■	3	3	0	0	3	2
24	P_2	■	1	1	1	■	7	2	0	■	2	2	0	0	2	2
25	P_2	■	0	0	0	■	6	1	0	■	1	1	0	0	1	2

b) Die erzielten Gesamterlöse belaufen sich bei der Verwendung von Standard Nesting auf 1375 GE, bei Theft Nesting auf 1225 GE und bei Dynamischer Anpassung auf 1350 GE.

c) Nur Standard Nesting führt zu einer vollständigen Auslastung. Bei Theft Nesting wird aufgrund von frühzeitigem, außerordentlichen Eintreffen von Anfragen nach P_1 und P_2 das Buchungslimit von P_3 reduziert. Dies hat zur Folge, dass später eintreffende Anfragen nach P_3 abgelehnt werden, da dem Low Before High-Prinzip folgend erwartet wird, dass die ursprünglich prognostizierten, „regulären“ Anfragen nach P_1 und P_2 noch eintreffen. Bei der Dynamischen Anpassung kann aufgrund der Reduktion des Buchungslimits von P_3 bei den Anfragen 11 und 13 die Anfrage 19 nicht angenommen werden (vgl. auch Aufgabenteil d)).

d) Der Unterschied zwischen den beiden Vorgehensweisen besteht darin, dass bei einer aktuellen Anfrage für ein höherwertiges Produkt, für welches kein eigenes Kontingent mehr vorhanden ist, auf unterschiedliche niederwertigere Kontingente zurückgegriffen wird. Bei Standard Nesting nutzt man das Kontingent der nächst-günstigeren Klasse, während bei der Dynamischen Anpassung auf das Kontingent der günstigsten Klasse ausgewichen wird. Dieses Vorgehen zeigt sich bei der Betrachtung der Anfragen 11 und 13.

Ü3.2: a) Die Bewertungen zur Ermittlung der Schachtelungshierarchien werden mit Hilfe der folgenden Formel ermittelt:

$$\bar{r}_{hi} = (r_i - \sum_{k \in A_i} \pi_{kt} \cdot a_{ki}) / a_{hi}$$

Dadurch ergibt sich für Ressource A:

$$\bar{r}_{A1} = (100-30 \cdot 1 - 30 \cdot 1)/1 = 40$$

$$\bar{r}_{A2} = (210-30 \cdot 1 - 30 \cdot 3)/1 = 90$$

Wir erhalten die Schachtelungshierarchie $\langle 2, 1 \rangle$.

Analog resultiert für Ressource B:

$$\bar{r}_{B1} = (100-30 \cdot 1 - 30 \cdot 1)/1 = 40$$

$$\bar{r}_{B2} = (210-30 \cdot 1 - 30 \cdot 3)/3 = 30$$

Die Schachtelungshierarchie ist $\langle 1, 2 \rangle$.

b) Die ressourcenspezifischen Buchungslimits errechnen sich wie folgt:

$$b_{h, i_k} = \max\left\{0, c_h - \sum_{j=1}^{k-1} a_{hi_j} \cdot x^*_{i_j}\right\}$$

Für die Ressourcen A bzw. B gilt dementsprechend:

$b_{A1} = 1$ $\quad$ $b_{B1} = 4$

$b_{A2} = 2$ $\quad$ $b_{B2} = 3$

c) Aufgrund der Buchungslimits $b_{A1} = 1 \geq 1$ und $b_{B1} = 4 \geq 1$ wird die Anfrage nach P_1 angenommen. Passt man die Buchungslimits gemäß Theft Nesting an, so erhält man für Ressource A $b_{A1} = 0$ und $b_{A2} = 1$. Für Ressource B ergibt sich $b_{B1} = 3$ und $b_{B2} = 2$.

Das Problem besteht nun darin, dass von Ressource A und B noch 1 bzw. 3 KE vorhanden sind, aber aufgrund der Buchungslimits

$b_{A1} = 0$ und $b_{B2} = 2 < 3$ weder eine Anfrage nach P_1 noch nach P_2 angenommem werden kann. Die Ursache für diesen „Deadlock" sind die beiden unterschiedlichen ressourcenspezifischen Schachtelungshierarchien.

Ü3.3: a)

DLP-Modell
Maximiere $V(c = (2, 2)) = 120x_1 + 100x_2 + 70x_3 + 75x_4$
unter den Nebenbedingungen
$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$ (Kapazitätsrestriktion „AGB – FRA") $x_1 + x_2 + x_4 \leq 2$ (Kapazitätsrestriktion „FRA – HAM") $x_1 \leq 1$; $x_2 \leq 1$; $x_3 \leq 0$; $x_4 \leq 1$ $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; $x_3 \geq 0$; $x_4 \geq 0$

Durch „scharfes Hinsehen" erkennt man, dass in der optimalen Lösung die beiden Produkte P_1 und P_2 abgesetzt werden. Die optimalen Kontingente lauten $\mathbf{x^*} = (1, 1, 0, 0)$. Der Resterlös beläuft sich auf $120 + 100 = 220$ €.

b) Die inputorientierten Opportunitätskosten $\tilde{\rho}_A$ und $\tilde{\rho}_B$ betragen:

$$\tilde{\rho}_A = V(\mathbf{c}) - V(\mathbf{c} - (1, 0)) = V(2, 2) - V(1, 2)$$

$$\tilde{\rho}_A = 220 - 195 = 25 \text{ €}$$

$$\tilde{\rho}_B = V(\mathbf{c}) - V(\mathbf{c} - (0, 1)) = V(2, 2) - V(2, 1)$$

$$\tilde{\rho}_B = 220 - 120 \text{ €}$$

Dabei lassen sich die optimalen Lösungen der Wertfunktion erneut durch „scharfes Hinsehen" ermitteln.

c) Die outputorientierten Opportunitätskosten $\tilde{\rho}_i$ für die Produkte $i = 1, \ldots, 4$ werden wie folgt berechnet:

$$\tilde{\rho}_1 = V(\mathbf{c}) - V(\mathbf{c} - (1, 1)) = V(2, 2) - V(1, 1)$$

$$\tilde{\rho}_1 = 220 - 120 = 100 \text{ €}$$

$$\tilde{\rho}_2 = V(\mathbf{c}) - V(\mathbf{c} - (1, 1)) = V(2, 2) - V(1, 1)$$

$$\tilde{\rho}_2 = 220 - 120 = 100 \text{ €}$$

$\tilde{\rho}_3 = V(\mathbf{c}) - V(\mathbf{c} - (1,0)) = V(2,2) - V(1,2)$

$\tilde{\rho}_3 = 220 - 195 = 25$ €

$\tilde{\rho}_4 = V(\mathbf{c}) - V(\mathbf{c} - (0,1)) = V(2,2) - V(2,1)$

$\tilde{\rho}_4 = 220 - 120 = 100$ €

d) Mit den inputorientierten Opportunitätskosten können die outputorientierten Opportunitätskosten hier nur sehr schlecht approximiert werden (deutliche Überschätzung). Als Approximation für $\tilde{\rho}_1$ bzw. $\tilde{\rho}_2$ ergibt sich:

$\tilde{\rho}_A + \tilde{\rho}_B = 100 + 25 = 125$ €

Da selbst der Erlös des teuersten Produkts unter dem Bid-Preis liegt ($125 > 120$), können weder Anfragen nach P_1 noch nach P_2 angenommen werden. Damit ist der Vorschlag nicht sinnvoll.

e) Da die inputorientierten Opportunitätskosten über dem Angebot des Ölscheichs liegen ($\tilde{\rho}_B = 100 > 95$), ist es nicht sinnvoll, das Angebot des Ölscheichs anzunehmen.

f) Es müssen mindestens die Opportunitätskosten in Höhe von $\tilde{\rho}_3 = 25$ € erzielt werden. Dementsprechend beläuft sich der maximale Rabatt auf $70 - 25 = 45$ €.

Ü3.4: a) D_3 wird nicht benötigt, D_1 und D_2 dagegen sind erforderlich.

b) Zunächst müssen die paarweisen Schutzlimits s_{13} und s_{23} mit der Regel von Littlewood bestimmt werden:

Für s_{13} wird sukzessive $r_3 \geq r_1 \cdot P(D_1 \geq c)$ überprüft. Das Symbol ✓ deutet dabei an, dass die Ungleichung erfüllt ist und das Schutzlimit gesenkt werden muss. Dagegen repräsentiert das Symbol ✗ die Verletzung der Ungleichung und damit das Erreichen des optimalen Schutzlimits.

$s_{13} = 2: 100 \geq 300 \cdot P(D_1 \geq 2)?\ 100 \geq 0?$ ✓

$s_{13} = 1: 100 \geq 300 \cdot P(D_1 \geq 1)?\ 100 \geq 150?$ ✗

$\Rightarrow \quad s_{13} = 1$

Analog gilt für s_{23}:

$s_{23} = 2: 100 \geq 200 \cdot P(D_1 \geq 2)?\ 100 \geq 0?$ ✓

$s_{23} = 1: \; 100 \geq 200 \cdot P(D_1 \geq 1)\,? \; 100 \geq 120\,?$ ×

$\Rightarrow \quad s_{23} = 1\,.$

Das gesamte Schutzlimit wird mittels der Formel für EMSR-a bestimmt:

$$s_j = \min\left\{\sum_{i=1}^{j-1} s_{ij}, C\right\}$$

$$s_3 = \min\left\{\sum_{i=1}^{2} s_{i3}, C\right\} = \min\{s_{13} + s_{23}, C\} = 2$$

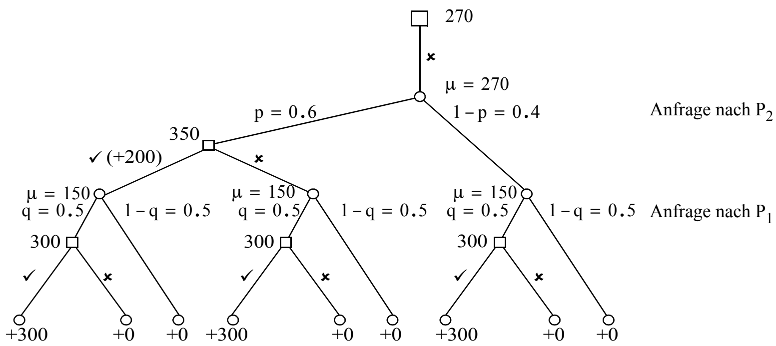
Die Anfrage nach P_3 wird bei einer Restkapazität von $c = 2$ abgelehnt.

c) Für eine übersichtlichere Darstellung wird der Baum in zwei Teilbäume zerlegt. Der erste Teilbaum analysiert die Ablehnung der Anfrage nach P_3, der zweite eine Annahme der Anfrage nach P_3.

Folgende Bezeichnungen werden eingeführt:

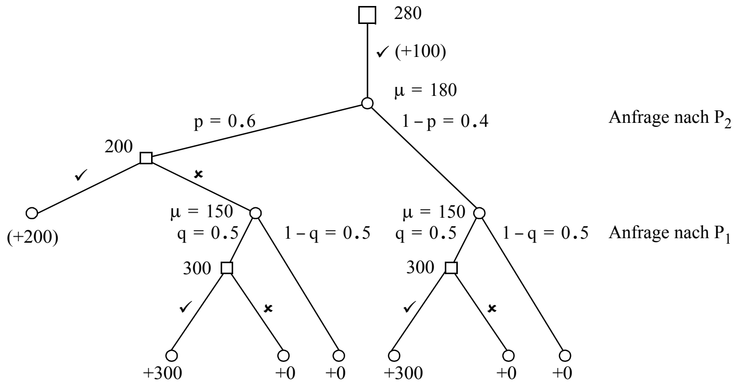
p Wahrscheinlichkeit, dass eine Anfrage nach P_2 eintrifft
q Wahrscheinlichkeit, dass eine Anfrage nach P_1 eintrifft
✓ Annahme der jeweiligen Anfrage
× Ablehnung der jeweiligen Anfrage

Teilbaum 1:



Bei Ablehnung der Anfrage nach P_3 beträgt der erwartete Erlös gemäß dem Entscheidungsbaum 270 GE.

Teilbaum 2:



Bei Annahme der Anfrage nach P_3 resultiert ein erwarteter Erlös von 280 GE. Insgesamt besteht die optimale Strategie somit darin, die Anfrage anzunehmen (280>270). EMSR-a liefert folglich in diesem Beispiel nicht die optimale Lösung.

d) Zuerst werden die Wahrscheinlichkeiten für die verbleibende Gesamtnachfrage nach den Produkten P_1 und P_2 der aggregierten Zufallsvariable $\tilde{D}_{j-1}$ (= $\tilde{D}_2$) berechnet:

$P(\tilde{D}_2 = 0)$	$P(\tilde{D}_2 = 1)$	$P(\tilde{D}_2 = 2)$
0.2	0.5	0.3

Um den Durchschnittsertrag $\tilde{r}_{j-1}$ (= $\tilde{r}_2$) ermitteln zu können, sind im nächsten Schritt die Erwartungswerte der Restnachfrage zu bestimmen:

$\bar{D}_1 = 0.5\,\text{ME}$, $\bar{D}_2 = 0.6\,\text{ME}$

$$\tilde{r}_2 = \left[\sum_{i=1}^{2} r_i \cdot \bar{D}_i\right] / \left[\sum_{i=1}^{2} \bar{D}_i\right] = \frac{200 \cdot 0.6 + 300 \cdot 0.5}{0.6 + 0.5} = 245.\overline{45}$$

Das Schutzlimit $\tilde{s}_{12}$ wird anschließend mit Hilfe der Regel von Littlewood durch Überprüfung von $r_3 \geq \tilde{r}_2 \cdot P(\tilde{D}_2 \geq c)$ bestimmt:

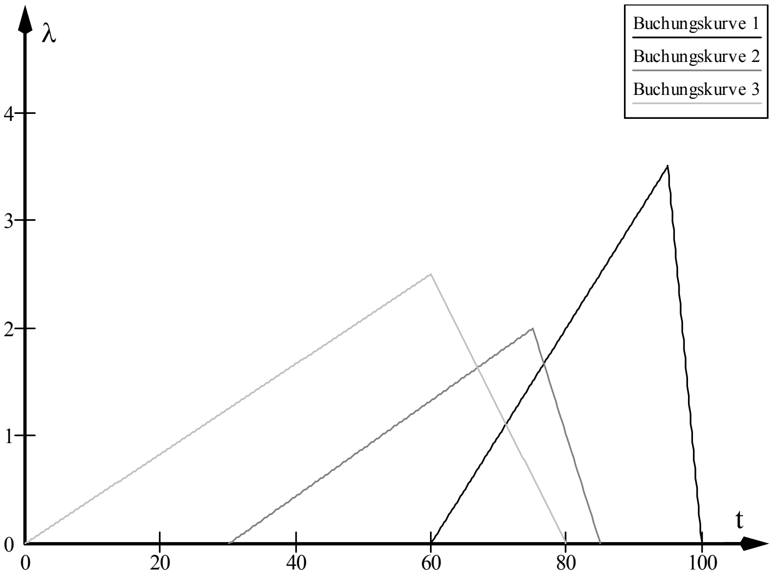
$\tilde{s}_{12} = 2:\ 100 \geq 245.45 \cdot P(\tilde{D}_2 \geq 2)\,?\ 100 \geq 73.64\,?\ \checkmark$

$\tilde{s}_{12} = 1:\ 100 \geq 245.45 \cdot P(\tilde{D}_2 \geq 1)\,?\ 100 \geq 196.36\,?\ \times$

$\Rightarrow\quad \tilde{s}_{12} = 1$

Die Anfrage nach P_3 wird angenommen. Folglich liefert EMSR-b in diesem Beispiel im Gegensatz zu EMSR-a die optimale Lösung.

Ü3.5: a) In dem unten stehenden Koordinatensystem sind die Buchungsverläufe der drei Produkte P_1, P_2 und P_3 dargestellt. Es liegen trianguläre Buchungskurven vor.



Die Buchungsverläufe entsprechen den Erwartungen, da P_1 den höchsten Preis hat und sich damit an kurzfristig buchende, wenig preissensitive Kunden richtet. Das Produkt P_3 erzielt den niedrigsten Preis, wodurch Anfragen bereits früh im Buchungszeitraum eingehen (z.B. von Touristen).

b) Zuerst müssen die Erwartungswerte für die Nachfrage nach P_1 und P_2, welche den Dreiecksflächen entsprechen, berechnet werden:

$$E(D_2) = \frac{(85-30)\cdot 2}{2} = 55$$

Daraus resultiert für P_2 eine $\mathcal{P}_{55}$-Verteilung, d.h. eine Poissonverteilung mit dem Parameter $\mu = 55$.

$$E(D_1) = \frac{(100-60)\cdot 3.5}{2} = 70$$

Für P_1 erhält man eine $\mathcal{P}_{70}$-Verteilung.

Die paarweisen Schutzlimits s_{12}, s_{13} und s_{23} werden mit der Regel von Littlewood bestimmt. Dabei geben wir im Folgenden nur die entscheidungsrelevanten Werte an.

s_{12} :

$s_{12} = 72 : 200 \geq 500 \cdot P(D_1 > 72) = 500 \cdot 0.376 = 188$? ✓

$s_{12} = 71 : 200 < 500 \cdot P(D_1 > 71) = 500 \cdot 0.421 = 210.5$? ✗

$\Rightarrow \quad s_{12} = 71$

s_{13} :

$100 \geq 500 \cdot P(D_1 > 77) = 500 \cdot 0.184 = 92$? ✓

$100 < 500 \cdot P(D_1 > 76) = 500 \cdot 0.216 = 108$? ✗

$\Rightarrow \quad s_{13} = 76$

s_{23} :

$100 \geq 200 \cdot P(D_2 > 55) = 200 \cdot 0.464 = 92.8$? ✓

$100 < 200 \cdot P(D_2 > 54) = 200 \cdot 0.518 = 103.6$? ✗

$\Rightarrow \quad s_{23} = 54$.

Die aggregierten Schutzlimits werden gemäß EMSR-a bestimmt:

$$s_j = \min\left\{\sum_{i=1}^{j-1} s_{ij}, C\right\}$$

Die resultierenden Schutz- und Buchungslimits lauten:

$s_2 = s_{12} = 71$ $\qquad b_2 = 160 - 71 = 89$

$s_3 = s_{13} + s_{23} = 76 + 54 = 130$ $\qquad b_3 = 160 - 130 = 30$

c) Die folgende Tabelle enthält die Entscheidungen über die Annahme und Ablehnung der Anfragen, wobei $\tilde{b}_i$ dem Rest-Buchungslimit für Produkt P_i entspricht:

Zeitpunkt	Anfragen	Annahme?	$\tilde{b}_3$	$\tilde{b}_2$	$\tilde{b}_1$
0	-	-	30	89	160
5	20 Anfragen nach P_3	✓	10	69	140
30	10 Anfragen nach P_1	✓	10	69	130
35	10 Anfragen nach P_3	✓	0	59	120
50	10 Anfragen nach P_3	✗	0	59	120
60	10 Anfragen nach P_1	✓	0	59	110
62	5 Anfragen nach P_2	✓	0	54	105
63	9 Anfragen nach P_3	✗	0	54	105
64	10 Anfragen nach P_1	✓	0	54	95
65	40 Anfragen nach P_3	✗	0	54	95
72	30 Anfragen nach P_2	✓	0	24	65

d) Im Zuge der Reoptimierung müssen die Rest-Erwartungswerte für die Nachfrage nach P_1 und P_2 berechnet werden. Diese Erwartungswerte entsprechen den „Restflächen" unter den Dreiecken ab dem Zeitpunkt $t = 59$:

$$E(\tilde{D}_2) = (75-59)\cdot\left(\frac{2+\left(-\frac{4}{3}+\frac{4}{90}\cdot 59\right)}{2}\right)+\frac{(85-75)\cdot 2}{2}$$

$$= 36.3\bar{1}$$

Daraus resultiert für die verbleibende Nachfrage nach P_2 eine $\mathcal{P}_{36.3\bar{1}}$-Verteilung.

$$E(\tilde{D}_1) = E(D_1) = 70$$

Der Erwartungswert für P_1 ändert sich somit nicht ($\mathcal{P}_{70}$-Verteilung). Daher gelten für die beiden Schutzlimits $\tilde{s}_{12}$ und $\tilde{s}_{13}$ weiterhin die Werte $\tilde{s}_{12} = 71$ bzw. $\tilde{s}_{13} = 76$, die in Aufgabenteil b) ermittelt wurden.

Für $\tilde{s}_{23}$ gilt:

$\tilde{s}_{23} = 36: 100 \geq 200 \cdot P(\tilde{D}_2 > 36) = 200 \cdot 0.476 = 95.2$? ✓

$\tilde{s}_{23} = 35: 100 < 200 \cdot P(\tilde{D}_2 > 35) = 200 \cdot 0.543 = 108.6$? ✗

$\Rightarrow \quad \tilde{s}_{23} = 35$

Die aggregierten Schutzlimits werden gemäß der Formel für EMSR-a bestimmt:

$$\tilde{s}_j = \min\left\{\sum_{i=1}^{j-1} \tilde{s}_{ij}, \tilde{C}\right\}$$

Die Restkapazität zum Zeitpunkt $t = 59$ beträgt $\tilde{C} = 160 - 40 = 120$ KE. Dadurch ergeben sich für die Schutzlimits $\tilde{s}_2$ und $\tilde{s}_3$ sowie die dazu gehörigen Buchungslimits $\tilde{b}_2$ bzw. $\tilde{b}_3$ die folgenden Werte:

$\tilde{s}_2 = \tilde{s}_{12} = 71 \Rightarrow \tilde{b}_2 = 120 - 71 = 49$

$\tilde{s}_3 = \tilde{s}_{13} + \tilde{s}_{23} = 76 + 35 = 111 \Rightarrow \tilde{b}_3 = 120 - 111 = 9$

In der folgenden Tabelle wird der verbleibende Anfragestrom aus Aufgabenteil c) dargestellt:

Zeitpunkt	Anfragen	Annahme?	$\tilde{b}_3$	$\tilde{b}_2$	$\tilde{b}_1$
50	10 Anfragen nach P_3	✗	0	59	120
59	REOPTIMIERUNG		9	49	120
60	10 Anfragen nach P_1	✓	9	49	110
62	5 Anfragen nach P_2	✓	9	44	105
63	9 Anfragen nach P_3	✓	0	35	96
64	10 Anfragen nach P_1	✓	0	35	85
65	40 Anfragen nach P_3	✗	0	35	85
72	30 Anfragen nach P_2	✓	0	5	55

Die Veränderung der Buchungslimits und der Annahmestrategie liegt darin begründet, dass die vor $t = 59$ erwartete Nachfrage nach P_2 nicht eintrifft (Fehlprognose?). Der positive Effekt für das Buchungslimit von P_3 wird jedoch teilweise dadurch kompensiert, dass vor $t = 59$ zusätzlich unerwartete Nachfrage nach P_1 eintrifft.

e) Die – in der Regel unrealistische – Annahme, dass für $i > j$ die Nachfrage nach P_i vollständig vor der Nachfrage nach P_j eintrifft, ist hier verletzt. Dennoch ist eine Verwendung von EMSR Heuristiken als Approximation in diesem Fall durchaus üblich. Grundsätzlich problematisch ist hingegen die Behandlung von eintreffenden Gruppenbuchungsanfragen, da bei der Berechnung der verwendeten Buchungslimits lediglich die Grenzerlöse für die jeweils nächste Kapazitätseinheit in Betracht gezogen werden. Für Gruppenbuchungen müsste daher eine differenziertere Betrachtung vorgenommen werden, bei welcher der Gesamterlös der Gruppenanfrage den gesamten durch deren Annahme verursachten Opportunitätskosten gegenübergestellt wird. Eine Steuerung auf Grundlage von Buchungslimits wird dadurch faktisch unmöglich. In diesem Zusammenhang ist jedoch anzumerken, dass im betrachteten Beispiel in allen Fällen, in denen Gruppenanfragen abgelehnt werden, das betreffende Buchungslimit bereits vollständig auf 0 reduziert ist, so dass die beschriebene Problematik hier (zufällig) nicht auftritt. Dennoch sollte die Möglichkeit von Gruppenanfragen grundsätzlich auch im Rahmen der Prognose und somit bei der Bestimmung der Zufallsvariablen D_i geeignet berücksichtigt werden.