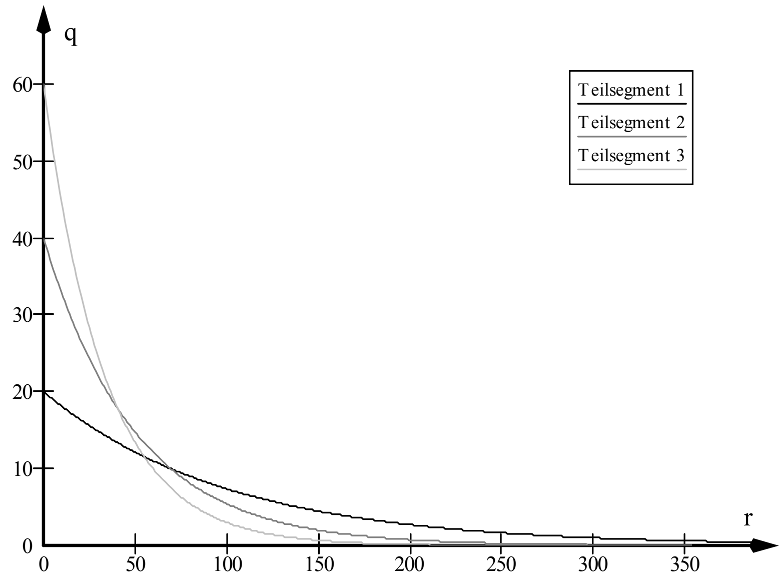
Lösungen zu den Übungsaufgaben aus Kapitel 2

Ü2.1: Durch Senkung der maximalen Zahlungsbereitschaft für Produkt P_2 in Segment 1 auf v_{12} = 99 GE kann der Anbieter für Produkt P_1 den Maximalpreis von r_1 = 500 GE wählen. Die nebenstehenende Tabelle enthält die dadurch erzielten Konsumentenrenten. Die Wahl einer alternativen Fencingstruktur ermöglicht somit die Erzielung eines höheren Gesamterlöses.

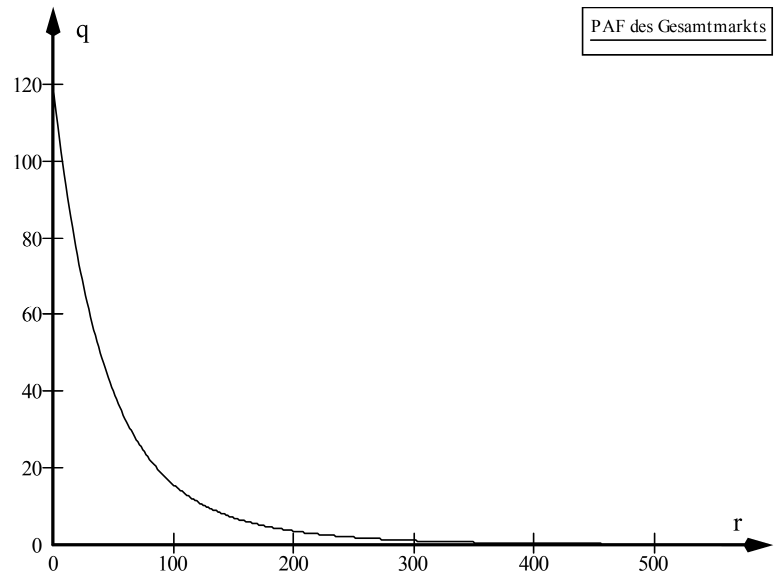
	$v_{ij} - r_j$	Produkt j: 1	Produkt j: 2
Segment i	1	0	–1
	2	–400	0
Preis r_j		500	100

Ü2.2: a) Die folgende Abbildung zeigt die Preisabsatzfunktionen der drei Teilsegmente:



Dabei ist das erste Segment ein Premium-Segment, das zweite bildet einen Normaltarif ab und das dritte stellt ein Niedrigpreis-Segment dar.

Um die Preisabsatzfunktion für den Gesamtmarkt zu berechnen, müssen die einzelnen Preisabsatzfunktionen addiert werden. Man erhält die Preisabsatzfunktion $q(r) = q_1(r_1) + q_2(r_2) + q_3(r_3)$, die in der folgenden Abbildung dargestellt ist:



b) **Möglichkeit 1: Betrachtung des Lagrange-Multiplikators**
Der Wert des Lagrange-Multiplikators gibt allgemein an, um welchen Betrag sich der optimale Zielfunktionswert verändert, wenn die jeweilige Restriktion um „eine Einheit" gelockert bzw. verschärft wird (infinitesimale Betrachtung!).
Der Wert von $\lambda \approx 24.27$ im Beispiel bedeutet daher, dass bei Verschärfung der Restriktion um eine Einheit ein weiterer Erlöszuwachs von ca. 24.27 GE möglich ist. Das „Erzwingen" einer vollständigen Kapazitätsauslastung ist somit nicht sinnvoll, da zur Erzielung des optimalen Erlöses weniger als 80 Einheiten benötigt werden.

Möglichkeit 2: (Isolierte) Betrachtung der ersten Ableitungen der Teilerlösfunktion
Berechnet man für die Teilerlösfunktionen $u_1 = r_1 \cdot q_1(r_1)$, $u_2 = r_2 \cdot q_2(r_2)$ und $u_3 = r_3 \cdot q_3(r_3)$ den jeweiligen Funktionswert der ersten Ableitung am vermeintlichen Optimum, so erhält man:

$$u_1'(75.22) = 20 \cdot e^{-0.01 \cdot r_1} - r_1 \cdot 20 \cdot e^{-0.01 \cdot r_1} \approx 2.34 > 0$$

$$u_2'(25.22) = 40 \cdot e^{-0.02 \cdot r_2} - r_2 \cdot 40 \cdot e^{-0.02 \cdot r_2} \approx 11.97 > 0$$

$$u_3'(8.55) = 60 \cdot e^{-0.03 \cdot r_3} - r_3 \cdot 60 \cdot e^{-0.03 \cdot r_3} \approx 34.52 > 0$$

Alle drei Ableitungen nehmen damit für die vorgegebenen Variablenwerte einen Wert größer 0 an, was impliziert, dass eine Erhöhung der Preise (und damit eine Senkung des jeweiligen Kapazitätsbedarfes) in jedem Fall zu einer Verbesserung des Zielfunktionswertes führen würde.

c) Da in Aufgabenteil b) bereits gezeigt wurde, dass für die optimale Lösung die Kapazitätsrestriktion von 80 KE nicht relevant ist, kann die Problemstellung als einfaches Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen gelöst werden. Man erhält:

$$r_1^* = 100 \text{ GE}, r_2^* = 50 \text{ GE}, r_3^* = 33.\bar{3} \text{ GE}$$

$$u^* \approx 2207.28 \text{ GE, Kapazitätsbedarf: ca. 44 KE}$$

Ü2.3: Als Vorüberlegung zu dieser Aufgabe wird zunächst die allgemeine Herleitung des Maximums einer Funktion der Form $u(r) = r \cdot (a - (b \cdot r))$ mit $a, b > 0$ erläutert:

Maximiere $u(r) = r \cdot q(r) = r \cdot (a - (b \cdot r)) = ar - br^2$

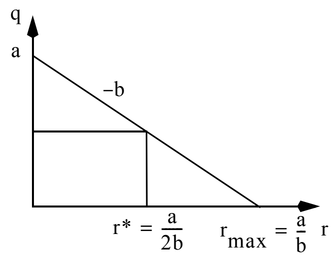
Notwendige Bedingung $u'(r) = 0$:
$\rightarrow \; a - 2br = 0 \; \rightarrow \; r^* = a/(2b)$

Hinreichende Bedingung für ein Maximum $u''(r^*) < 0$:
$\rightarrow \; -2b < 0$ erfüllt

Der optimale Erlös beträgt somit genau die Hälfte des maximalen Erlöses (Schnitt der Preisabsatzfunktion mit der r-Achse):

$a - br = 0 \; \rightarrow \; r_{max} = \dfrac{a}{b}$

Die Erlösfunktion ist eine nach unten geöffnete Parabel mit genau einem globalen Maximum bei $r^* = \dfrac{a}{2b}$.



a) Bestimmung des optimalen Einheitspreises unter Verwendung der oben hergeleiteten Formel:

$$a = 120,\ b = \frac{17}{20}$$

$$r^* = \frac{120}{2 \cdot \frac{17}{20}} \approx 70.59 \text{ GE}$$

$$u^* = 70.59 \cdot \left(120 - \frac{17}{20} \cdot 70.59\right) = 4235 \text{ GE}$$

$$q(r^*) = 120 - \frac{17}{20} \cdot 70.59 = 60 \text{ ME}$$

Es ergibt sich ein erlösmaximaler Einheitspreis von 70.59 GE, aus dem ein Gesamterlös in Höhe von 4235 GE resultiert. Die Mindestkapazität der Maschine muss 60 KE betragen.

b) Die Aggregation/Summation der Preisabsatzfunktionen der Segmente muss die Gesamtfunktion ergeben. Da die Nachfrage nach P_3 in diesem Abschnitt der Funktion bereits 0 beträgt, ist nur noch P_2 zu berücksichtigen. Die Parameter ergeben sich somit aus der Differenz der Gesamtfunktion und der Funktion von P_2:

$$\alpha = 120 - 40 = 80$$

$$\beta = \frac{17}{20} - \frac{1}{3} = \frac{31}{60}$$

c) Aufgrund der Gestaltung der verschiedenen Restriktionen richtet sich P_1 vor allem an Geschäftsreisende, P_2 an Wochenendpendler und P_3 an Urlauber.

d) Die beiden Segmente 1 und 2 haben denselben Preis-Absatz-Zusammenhang. Nur die jeweiligen Segmentgrößen unterscheiden sich. Aus diesem Grund ist das Fencing zwischen den Produkten P_1 und P_2 nicht erlösrelevant. Sie könnten dementsprechend zusammengefasst werden (Fencingkriterium: älter als 27 Jahre).

e) Da keine Kapazitätsrestriktion zu berücksichtigen ist, lässt sich für jede Buchungsklasse der optimale Preis separat bestimmen. Dazu sind jeweils die einzelnen Abschnitte der Definitionsbereiche zu analysieren und die zugehörigen lokalen Maxima zu bestimmen. Für Strategie I ergibt sich folgende Argumentation:

Buchungsklasse P_1:

Vernachlässigt man die jeweils vorgegebenen Abschnittsgrenzen, so lässt sich der erlösmaximale Preis durch die zu Beginn der Aufgabe hergeleitete Formel bestimmen.

Abschnitt $[0;100]$:

$$r = \frac{30}{2 \cdot \frac{1}{60}} = 900$$

$\rightarrow$ Die ermittelte Maximalstelle liegt rechts außerhalb des zugehörigen Abschnitts. Aufgrund der Konkavität der betrachteten Teilfunktion befindet sich das Maximum daher an der rechten Abschnittsgrenze.

Abschnitt $(100;120]$:

$$r = \frac{80}{2 \cdot \frac{31}{60}} \approx 78.68$$

$\rightarrow$ Wir erhalten eine Maximalstelle, die links des Abschnitts liegt. Aus dem Krümmungsverhalten der Funktion folgt, dass die Teilfunktion ihr Maximum an der linken Intervallgrenze annimmt.

Abschnitt $(120;141.18]$:

$$r = \frac{120}{2 \cdot \frac{17}{20}} \approx 70.59$$

$\rightarrow$ Es gilt die gleiche Argumentation wie zuvor.

Insgesamt folgt, dass das globale Maximum bei $r_1^* = 100$ liegt. Hierfür ergibt sich eine benötigte Kapazität und ein erzielter Erlös für P_1 in Höhe von:

$$q(r_1^*) = 30 - \frac{1}{60} \cdot 100 = 28.\bar{3} \text{ KE}$$

$$u_1^* = 2833.\bar{3} \text{ GE}$$

Buchungsklassen P_2 und P_3:

Für die verbleibenden Buchungsklassen P_2 und P_3 lassen sich die erlösmaximalen Preise und der Kapazitätsbedarf direkt bestimmen:

$$P_2: \; r_2^* = \frac{40}{2 \cdot \frac{1}{3}} = 60 \text{ GE}$$

$$q(r_2^*) = 40 - \frac{1}{3} \cdot 60 = 20 \text{ KE}$$

$$u_2^* = 1200 \text{ GE}$$

$$P_3: \; r_3^* = \frac{50}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 50 \text{ GE}$$

$$q(r_3^*) = 50 - \frac{1}{2} \cdot 50 = 25 \text{ KE}$$

$$u_3^* = 1250 \text{ GE}$$

Für Strategie I ergeben sich die erlösmaximalen Preise $r_1^* = 100$ GE, $r_2^* = 60$ GE und $r_3^* = 50$ GE mit den Absatzmengen $q(r_1^*) = 28.\bar{3}$ ME, $q(r_2^*) = 20$ ME sowie $q(r_3^*) = 25$ ME.

Der erzielte Gesamterlös beträgt:

$$u_1^* + u_2^* + u_3^* = 5283.\bar{3} \text{ GE}$$

Für Strategie II werden die drei Erlösfunktionen erneut separat betrachtet.

Für die Buchungsklassen P_1 und P_2 erhalten wir die folgenden Lösungen:

$$P_1: \; r_1^* = \frac{20}{2 \cdot \frac{3}{20}} = 66.\bar{6} \text{ GE}$$

$$q(r_1^*) = 20 - \frac{3}{20} \cdot 66.\bar{6} = 10 \text{ KE}$$

$$u_1^* = 666.\bar{6} \text{ GE}$$

$$P_2: \; r_2^* = \frac{40}{2 \cdot \frac{3}{10}} = 66.\bar{6} \text{ GE}$$

$$q(r_2^*) = 40 - \frac{3}{10} \cdot 66.\bar{6} = 20 \text{ KE}$$

$$u_2^* = 1333.\bar{3} \text{ GE}$$

Für P_3 ist eine abschnittsweise Untersuchung erforderlich.

Abschnitt $[0;133.\bar{3}]$:

$$r = \frac{60}{2 \cdot \frac{2}{5}} = 75 \rightarrow r_3 = 75$$

Abschnitt $(133.\bar{3};141.18]$:

$$r = \frac{120}{2 \cdot \frac{17}{20}} \approx 70.60$$

$\rightarrow$ Die erhaltene Maximalstelle liegt links außerhalb des Abschnitts. Aufgrund der Konkavität der betrachteten Teilfunktion befindet sich das Maximum daher an der linken Abschnittsgrenze.

Insgesamt folgt daraus, dass das Maximum bei $r_3^* = 75$ liegt. Hierfür ergibt sich eine benötigte Kapazität und ein erzielter Erlös für P_3 in Höhe von:

$$q(r_3^*) = 60 - \frac{2}{5} \cdot 75 = 30 \text{ KE}$$

$$u_3^* = 2250 \text{ GE}$$

Es ergeben sich somit erlösmaximale Preise $r_1^* = 66.\bar{6}$ GE, $r_2^* = 66.\bar{6}$ GE, $r_3^* = 75$ GE mit den zugehörigen Absatzmengen $q(r_1^*) = 10$ ME, $q(r_2^*) = 20$ ME, $q(r_3^*) = 30$ ME.

Der erzielte Gesamterlös beträgt:

$$u_1^* + u_2^* + u_3^* = 4250 \text{ GE}$$

Aufgrund des größeren Gesamterlöses ($5283.\bar{3} > 4250$) ist Strategie I zu bevorzugen. Die Kapazität der Maschine muss mindestens $28.33 + 20 + 25 = 73.\bar{3}$ KE betragen.

Ü2.4:

a)

Kunde	v_{IK}	v_{AK}	
1	1400	1400	
2	0	1300	
3	1150	1500	
4	1200	1800	
5	1100	1100	
„IK max"	Kunde 1+4 = 2600	Kunde 2+3 = 2800	Σ = 5400
„AK max"	Kunde 1+5 = 2500	Kunde 3+4 = 3300	Σ = 5800

Wird die Strategie „AK max" verfolgt, so werden den Kunden 1 und 5 die Innenkabinen und den Kunden 3 und 4 die Außenkabinen zu ihren jeweiligen individuellen Zahlungsbereitschaften angeboten. ADIA kann dadurch einen Erlös in Höhe von 5800 GE erzielen.

b)

Kunde	v_{IK}	PC_{IK} (v_{IK}-r_{IK})	v_{AK}	PC_{AK} (v_{AK}-r_{AK})	
1	1400	✓	1400	×	
2	0	×	1300	×	
3	1150	✓	1500	✓	
4	1200	✓	1800	✓	
5	1100	✓	1100	×	
r_j	1100	---	1500	---	
	Kunde 1+5 = $2 \cdot 1100$		Kunde 3+4 = $2 \cdot 1500$		Σ = 5200

Erneut bietet man den Kunden 1 und 5 die Innen- bzw. den Kunden 3 und 4 die Außenkabinen an. Dabei muss als Angebotspreis jeweils das Minimum der Zahlungsbereitschaften gewählt werden. Der erzielte Gesamterlös der ADIA reduziert sich damit gegenüber Teilaufgabe a) auf 5200 GE.

c)

Kunde	v_{IK}	PC_{IK}	ICC_{IK}	v_{AK}	PC_{AK}	ICC_{AK}	
1	1400	✓	✓	1400	✗	---	
2	0	✗	---	1300	✗	---	
3	1150	✓	✓	1500	✓	✗	
4	1200	✓	✗	1800	✓	✓	
5	1100	✓	✓	1100	✗	---	
r_j	1100	---	---	1500	---	---	
	Kunde 1+3 = $2 \cdot 1100$			Kunde 4 = 1500			Σ = 3700

Bei den so gewählten Preisen ist für die Innenkabine die ICC nur für die Kunden 1, 3 und 5 erfüllt. Bei der Außenkabine wird diese Bedingung sogar nur für Kunde 4 eingehalten. Der Erlös beträgt 3700 GE.

d)

Kunde	v_{IK}	PC_{IK}	ICC_{IK}	v_{AK}	PC_{AK}	ICC_{AK}	
1	1400	✓	✓	1400	✗	---	
2	0	✗	---	1300	✗	---	
3	1150	✓	✗	1500	✓	✓	
4	1200	✓	✗	1800	✓	✓	
5	1100	✓	✓	1100	✗	---	
r_j	1100	---	---	1449	---	---	
	Kunde 1+5 = $2 \cdot 1100$			Kunde 3+4 = $2 \cdot 1449$			Σ = 5098

Wird der Preis für die Außenkabine um 51 GE gesenkt, so ist die entsprechende ICC für Kunde 3 wieder erfüllt. Dadurch wählen die Kunden 1 und 5 die Innenkabine, während die Kunden 3 und 4 sich für die Außenkabine entscheiden. ADIA kann dadurch einen Erlös in Höhe von 5098 GE erzielen.

e) Der folgende Nachweis der Optimalität beruht auf der Bestimmung oberer Schranken für den bei anderen Preis- und daraus resultierenden Absatzkombinationen erzielbaren Gesamterlös. In einem ersten Schritt überlegen wir uns, dass es notwendig ist, alle vier Kabinen zu verkaufen, um einen Erlös von mehr als den in Teilaufgabe d) ermittelten 5098 GE zu erzielen:

Obere Erlösschranke bei weniger als zwei abgesetzten AKn:
$1800 + 1400 + 1200 = 4400 < 5098$

Obere Erlösschranke bei weniger als zwei abgesetzten IKn:
$1400 + 1500 + 1800 = 4700 < 5098$

Damit ist nur noch zu zeigen, dass sich für keine andere Absatzkombination, bei der sowohl zwei IKn als auch zwei AKn verkauft werden, ein höherer Erlös erzielen lässt. Dazu werden im Folgenden obere Schranken für den realisierbaren Gesamterlös möglicher Alternativlösungen unter Relaxation der ICC sowie der Reihenfolge der Anfragen betrachtet:

Für die IKn beträgt der maximale Erlös $2 \cdot 1200 = 2400$ GE. Um 5098 GE zu übertreffen, müssten mit den AKn daher mehr als 2698 GE eingenommen werden. Dies ist nur durch den Absatz der AKn an die Kunden 3 und 4 ($2 \cdot 1500 = 3000$ GE), an die Kunden 1 und 4 ($2 \cdot 1400 = 2800$ GE) oder an die Kunden 1 und 3 ($2 \cdot 1400 = 2800$ GE) möglich.

Berücksichtigt man nun, dass jeder Kunde sich höchstens für eine Kabine entscheidet, so erlaubt der Verkauf der AKn an die Kunden 3 und 4 nur eine Zuteilung der IKn an die Kunden 1 und 5, was zu der Lösung aus Aufgabenteil d) führt.

Der Verkauf der AKn an die Kunden 1 und 4 dagegen gestattet nur eine Zuteilung der IKn an die Kunden 3 und 5. Dadurch ergibt sich als obere Schranke für den Gesamterlös:
$2800 + 2 \cdot 1100 = 5000 < 5098$

Weist man die AKn alternativ den Kunden 1 und 3 zu, so ist nur eine Zuteilung der IKn an die Kunden 4 und 5 denkbar. Daraus resultiert als obere Schranke für den Gesamterlös:
$2800 + 2 \cdot 1100 = 5000 < 5098$

Da alle oberen Schranken für die Erlöse möglicher Alternativlösungen kleiner als der entsprechende Wert aus Teilaufgabe d) sind, stellen die Preise $r_{AK} = 1449$ und $r_{IK} = 1100$ mit dem Gesamterlös von 5098 GE die optimale Lösung dar.