Lösungen zu den Übungsaufgaben aus Kapitel 4

Ü4.1: Da ein gebuchter Passagier mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.1 nicht zum Abflug erscheint, lautet die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariablen, welche bei b vorliegenden Buchungen die insgesamt zum Abflug erscheinenden Passagiere beschreibt:

$$p_b(z) = \binom{b}{z} \cdot (0.9)^z \cdot (0.1)^{b-z}$$

Die zugehörige Verteilungsfunktion lautet:

$$F_b(z) = \sum_{k=1}^{z} \binom{b}{k} \cdot (0.9)^k \cdot (0.1)^{b-k}$$

a) Es gilt $s_1(b) = F_b(100)$. Ausgehend von $b = 100$ wird das Überbuchungslimit solange erhöht, bis man $s_1(b) \geq 0.99 \wedge s_1(b+1) < 0.99$ erhält. Es resultiert:

$$s_1(104) = 0.9943 \geq 0.99 \wedge s_1(105) = 0.9832 < 0.99$$

Das optimale Überbuchungslimit beträgt somit $b^* = 104$ Sitzplätze.

b) Es gilt $s_2(b) = [\sum_{k=1}^{100} k \cdot p_b(k) + \sum_{k=101}^{b} 100 \cdot p_b(k)]/(0.9 \cdot b)$. Ausgehend von $b = 100$ erhöht man das Überbuchungslimit solange, bis $s_2(b) \geq 0.99 \wedge s_2(b+1) < 0.99$ erfüllt ist. Man erhält:

$$s_2(110) = 0.9920 \geq 0.99 \wedge s_1(111) = 0.9880 < 0.99$$

Als optimales Überbuchungslimit resultieren $b^* = 110$ Sitzplätze.

c) Beginnend mit $b = 100$ wird das Überbuchungslimit solange erhöht, bis $F_b(100) > 250/(300+250)(= 0.\overline{45}) \wedge F_{b+1}(100) \leq 250/(300+250)(= 0.\overline{45})$ gilt. Es ergibt sich:

$$F_{111}(100) = 0.5589 > 0.\overline{45} \wedge F_{112}(100) = 0.4458 \leq 0.\overline{45}$$

Wir erhalten als optimales Überbuchungslimit $b^* = 111$ Sitzplätze.

Ü4.2: Gemäß des Entscheidungsbaummodells aus Kap. 4.3.1.1 wird eine Anfrage genau dann angenommen, wenn gilt:

$$p \geq \frac{r_1 - r_2}{r_2}$$

Durch einfache Termumformung und Anpassung der Bezeichner an die Schreibweise aus Kap. 3.2.1 erhält man:

$$p \geq \frac{r_1 - r_2}{r_1} \quad \Leftrightarrow$$

$$P(x_2 + D_1 < C) \geq \frac{r_1 - r_2}{r_1} \quad \Leftrightarrow$$

$$P(D_1 < c) \geq \frac{r_1 - r_2}{r_1} \quad \Leftrightarrow$$

$$1 - P(D_1 \geq c) \geq \frac{r_1 - r_2}{r_1} \quad \Leftrightarrow$$

$$1 - \frac{r_1 - r_2}{r_1} \geq P(D_1 \geq c) \quad \Leftrightarrow$$

$$r_2 \geq r_1 \cdot P(D_1 \geq c)\,.$$

Die letzte Ungleichung entspricht der Regel von Littlewood (vgl. Formel (3.1), S. 87, des Lehrbuchs).

Ü4.3: Aus dem Entscheidungsbaum ergibt sich als Bedingung für die Annahme von P_2:

$$(p \cdot q \cdot r_2) + (1 - p) \cdot q \cdot (r_2 - g) \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

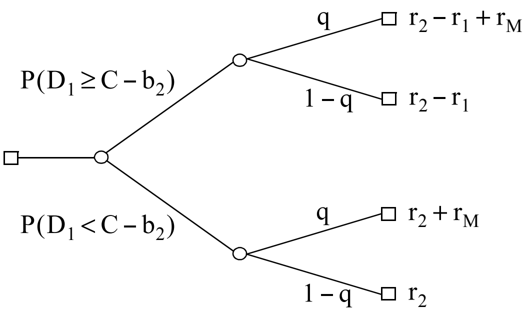
$$p \cdot r_2 + (1 - p) \cdot (r_2 - g) \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$p \cdot r_2 + r_2 - g - p \cdot r_2 + p \cdot g \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$p \cdot g \geq g - r_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$p \geq \frac{g - r_2}{g}$$

Ü4.4: a) Man erhält den folgenden erweiterten Entscheidungsbaum:



b) Gemäß obigem Entscheidungsbaum wird eine Anfrage genau dann angenommen, wenn gilt:

$$P(D_1 \geq C - b_2) \cdot (q \cdot (r_2 - r_1 + r_M) + (1-q) \cdot (r_2 - r_1)) +$$
$$+ P(D_1 < C - b_2) \cdot (q \cdot (r_2 + r_M) + (1-q) \cdot r_2) > 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(1 - P(D_1 < C - b_2)) \cdot (q \cdot r_M + (r_2 - r_1)) +$$
$$+ P(D_1 < C - b_2) \cdot (q \cdot r_M + r_2) > 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(q \cdot r_M + (r_2 - r_1)) - P(D_1 < C - b_2) \cdot (r_2 - r_1) +$$
$$+ P(D_1 < C - b_2) \cdot r_2 > 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$P(D_1 < C - b_2) \cdot r_1 > r_1 - r_2 - q \cdot r_M$$
$$\Leftrightarrow$$
$$P(D_1 < C - b_2) > \frac{r_1 - r_2 - q \cdot r_M}{r_1}$$

Im Allgemeinen ist es sinnvoll, eine Anfrage auch dann anzunehmen, wenn ihr erwarteter Grenzerlös – unter Berücksichtigung der verursachten Opportunitätskosten – gleich Null ist (vgl. Aufgaben Ü4.2 und Ü4.3). Entsprechend ergäbe sich in der Entscheidungsregel ein „$\geq$“-Zeichen.

c) Unter Verwendung des Ergebnisses aus Aufgabenteil b) ergibt sich:

$$(1 - P(D_1 \geq C - b_2)) > \frac{r_1 - r_2 - q \cdot r_M}{r_1}$$

$$(1 - 0.5) > \frac{100 - 45 - 0.5 \cdot r_M}{100} \quad \Leftrightarrow$$

$$50 > 55 - 0.5 \cdot r_M \quad \Leftrightarrow$$

$$0.5 \cdot r_M > 5 \quad \Leftrightarrow$$

$$r_M > 10$$

Es sind daher mindestens 10 Euro für das „Mahlzeit/Softdrink"-Bundle zu verlangen.